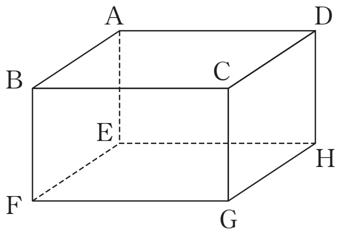
PART3　共面条件

3　直方体 ABCD－EFGH において，辺 AD の中点を P，辺 AE を 2：7 に内分する点を Q，辺 DC を 2：3 に内分する点を R，辺 CG を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を S とする。4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるとき，t の値を求めよ。



Point Pickup

一直線上にない 3 点 A，B，C が定める平面 ABC について

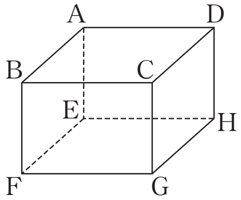
点 P が平面 ABC 上にある

$\iff$　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 s，t が存在する

$\iff$　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$ を満たす実数 s，t，u が存在する

第 13 講　PART3　確認問題

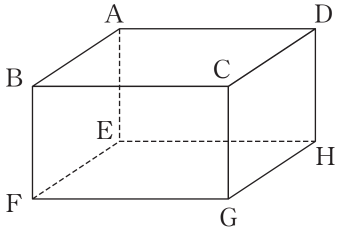
1　直方体 ABCD-EFGH において，辺 AB を 1：3 に内分する点を P，辺 AD を 1：2 に内分する点を Q，辺 DH の中点を R，辺 HG を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を S とする。4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるとき，t の値を求めよ。



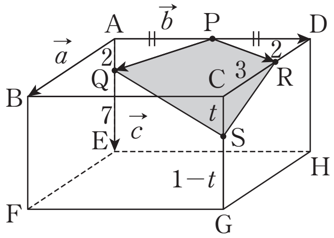
$t=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$

PART3　共面条件

3　直方体 ABCD－EFGH において，辺 AD の中点を P，辺 AE を 2：7 に内分する点を Q，辺 DC を 2：3 に内分する点を R，辺 CG を $t：(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を S とする。4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるとき，t の値を求めよ。



$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。



(解法 1)

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DR}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CS}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+t\vec{c}\ \cdots\cdots ①$$

4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるとき，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{PS}=\alpha\overrightarrow{PQ}+\beta\overrightarrow{PR}$$

と表される。

$$\overrightarrow{PS}=\alpha\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)+\beta\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{2}{5}\beta\vec{a}+\left(-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\vec{b}+\frac{2}{9}\alpha\vec{c}\ \cdots\cdots ②$$

であるから，①，②より

$$\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+t\vec{c}=\frac{2}{5}\beta\vec{a}+\left(-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\vec{b}+\frac{2}{9}\alpha\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$1=\frac{2}{5}\beta,\ \frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta,\ t=\frac{2}{9}\alpha$$

したがって　$\alpha=\dfrac{3}{2}$，$\beta=\dfrac{5}{2}$，$t=\dfrac{1}{3}$

（解法 2）

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{9}\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DR}}=\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CS}}=\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}\ \cdots\cdots ①$$

4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるとき，実数 α，β，γ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AR}},\ \alpha+\beta+\gamma=1$$

と表される。

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{2}\alpha\vec{b}+\frac{2}{9}\beta\vec{c}+\gamma\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\frac{2}{5}\gamma\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\alpha+\gamma\right)\vec{b}+\frac{2}{9}\beta\vec{c}\ \cdots\cdots ②$$

であるから，①，②より

$$\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}=\frac{2}{5}\gamma\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\alpha+\gamma\right)\vec{b}+\frac{2}{9}\beta\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

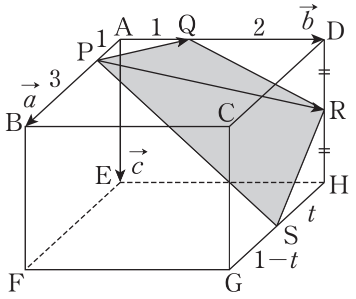
$$1=\frac{2}{5}\gamma,\ 1=\frac{1}{2}\alpha+\gamma,\ t=\frac{2}{9}\beta,\ \alpha+\beta+\gamma=1$$

したがって　$\alpha=-3$，$\beta=\dfrac{3}{2}$，$\gamma=\dfrac{5}{2}$，$t=\dfrac{1}{3}$

第 13 講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：1，イ：2

[解説]



$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。

（解法 1）

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DR}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS}&=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HS}\\&=-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+t\vec{a}\\&=\left(t-\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるとき，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{PS}=\alpha\overrightarrow{PQ}+\beta\overrightarrow{PR}$$ [A]

と表される。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS}&=\alpha\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\beta\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\\&=-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}\alpha+\beta\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\beta\vec{c}\ \cdots\cdots②\end{aligned}$$

であるから，①，②より

［A］　一直線上にない 3 点 A，B，C が定める平面 ABC について
点 P が平面 ABC 上にある
$\iff \overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 s，t が存在する
$\iff \overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$ を満たす実数 s, t, u が存在する

$$\left(t-\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$$=-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}\alpha+\beta\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\beta\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立であるから

$$t-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(\alpha+\beta),\ 1=\frac{1}{3}\alpha+\beta$$

$$1=\frac{1}{2}\beta$$

したがって　$\alpha=-3$，$\beta=2$，$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$

（解法2）

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DR}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HS}$$

$$=\vec{b}+\vec{c}+t\vec{a}=t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\ \cdots\cdots①$$

4点P，Q，R，Sが同一平面上にあるとき，実数

α，β，γ を用いて

$$\overrightarrow{AS}=\alpha\overrightarrow{AP}+\beta\overrightarrow{AQ}+\gamma\overrightarrow{AR},\ \alpha+\beta+\gamma=1$$ [A]

と表される。

$$\overrightarrow{AS}=\alpha\times\frac{1}{4}\vec{a}+\beta\times\frac{1}{3}\vec{b}+\gamma\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\alpha\vec{a}+\left(\frac{1}{3}\beta+\gamma\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\gamma\vec{c}\ \cdots\cdots②$$

であるから，①，②より

$$t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{1}{4}\alpha\vec{a}+\left(\frac{1}{3}\beta+\gamma\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\gamma\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立であるから

$$t=\frac{1}{4}\alpha,\ 1=\frac{1}{3}\beta+\gamma,\ 1=\frac{1}{2}\gamma$$

$$\alpha+\beta+\gamma=1$$

したがって　$\alpha=2$，$\beta=-3$，$\gamma=2$，$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$